
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Φυλλάδιο 10

1 Η εξίσωση δευτέρου βαθμού στο χώρο

Άσκηση 1.1 Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $(0, 0, 0)$ και οδηγό την καμπύλη $(\gamma) : (x^2 + y^2 = x, z = 1)$.

Άσκηση 1.2 Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $xy + z^2 - 2x - y + 2 = 0$, παριστάνει κωνική επιφάνεια. Να βρεθεί η κορυφή της και μια οδηγός.

Άσκηση 1.3 Ναδειχθεί ότι η επιφάνεια

$$4 \left(\frac{x-3}{y} \right)^2 + 9 \left(\frac{y+z-1}{y} \right)^2 = 36$$

παριστάνει κωνική επιφάνεια, της οποίας να βρεθεί η κορυφή και μια οδηγός.

Άσκηση 1.4 Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a} = (1, 1, 2)$ και οδηγό την καμπύλη $(\gamma) : (xy = 1, z = 0)$.

Άσκηση 1.5 Να βρεθεί η κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\vec{a} = (4, -2, 6)$ και οδηγό την καμπύλη $(\gamma) : (3x^2 - y^2 + x = 1, z = 3)$.

Άσκηση 1.6 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2(2x - y)^2 + (3x - z)^2 - 2 = 0$ παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια, της οποίας να βρεθεί η διεύθυνση των γενετειρών και μια οδηγός.

Άσκηση 1.7 Να βρεθεί η ορθή προβολή της καμπύλης

$$(\gamma) : (x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + 3y + z - 2 = 0)$$

πάνω στο επίπεδο $x - y + z = 0$.

Άσκηση 1.8 Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται με περιστροφή της καμπύλης

$$(\gamma) : (x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 1, y = 2x)$$

περί τον άξονα Oz .

Άσκηση 1.9 Να βρεθούν οι εξισώσεις του γεωμετρικού τόπου των ορθών προβολών του σημείου $A(0, 0, 1)$ στις γενέτειρες του κώνου $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Άσκηση 1.10 Να βρεθεί η εξίσωση της επιφάνειας, που προκύπτει περιστρέφοντας την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2)$ γύρω από την ευθεία $(\varepsilon) : (6x = 3y = 2z)$.

Άσκηση 1.11 Μια επιφάνεια έχει εξίσωση την $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$. Αφού αποδειχθεί ότι είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, να βρεθεί ο άξονας περιστροφής και οι εξισώσεις μιας γενέτειρας.

Άσκηση 1.12 Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_\lambda) : (3\lambda x + y - 2\lambda z = 0, x - 2y + \lambda z = 0)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να αποδειχθεί ότι η ε_λ με την κίνησή της παράγει κωνική επιφάνεια, της οποίας να βρεθεί η κορυφή.

Άσκηση 1.13 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 9$ παριστάνει επιφάνεια εκ περιστροφής.

Άσκηση 1.14 Να βρεθεί η εξίσωση και το είδος της επιφάνειας που παράγεται με την κίνηση της ευθείας

$$(\varepsilon_\lambda) : (x + 2y - \lambda z = 0, x - 2y - 1/\lambda = 0),$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $A(1, 0, 1)$ της επιφάνειας.

Άσκηση 1.15 Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο των επιφανειών: Ελλειψοειδές, Μονόχωνο και Δίχωνο Υπερβολοειδές & Ελλειπτικό και Υπερβολικό Παραβολοειδές.

Άσκηση 1.16 Δίνεται η επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$. Να αποδειχθεί ότι οι ορθές προβολές του σημείου $(0, 0, \sqrt{3})$ στα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφάνειας, βρίσκονται πάνω σε σφαίρα με κέντρο το σημείο $O(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2.

Άσκηση 1.17 Τι παριστάνουν στο \mathbb{R}^3 καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:

(1) $xz = 0, xyz = 0, (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0,$

(2) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 13 = 0,$

(3) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z - 3 = 0,$

(4) $x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x + 8y + 6z - 21 = 0,$

(5) $2x^2 + y^2 = 1, x(x - 1 + y)(y - 1) + z^3 = 0.$